



**CENTRO DE INGENIERIA DE LA CALIDAD – CALI – COLOMBIA**  
[www.cicalidad.com](http://www.cicalidad.com)    [info@cicalidad.com](mailto:info@cicalidad.com)

## **Metodología de Superficies de Respuesta, gran alternativa para incrementar la productividad de sus procesos.**

**Introducción:** El presente documento describe de forma general y breve la metodología de superficies de respuesta, una breve historia de su desarrollo, conceptualización básica, campos de aplicación, alternativas de solución y ante todo pretende mostrar la importancia y gran utilidad de dicha metodología dentro de un proceso de optimización estadística de procesos.

La descripción de la metodología se llevará a cabo ilustrando un ejemplo de aplicación con datos correspondientes a un proceso en el cuál se desea encontrar los niveles de Tiempo (minutos) y Temperatura (grados Celsius) que maximizan el Rendimiento del proceso (%). En este caso entonces, la característica de calidad que interesa optimizar es el rendimiento del proceso (%); para este ejemplo optimizar significa maximizar dada la naturaleza de la variable; los factores que actúan sobre la característica de calidad serán el Tiempo y la Temperatura. Los efectos de las demás variables que afectan el rendimiento se considerará que afectarán aleatoriamente a los diferentes tratamientos, es decir, no favorecerán ni desfavorecerán a ninguno de ellos, y esto se logra aleatorizando las corridas experimentales. Todos los cálculos y gráficos han sido elaborados en MINITAB; y aquí es importante recordar que el software facilita en alto grado los análisis y la toma de decisiones.

### **Algunos conceptos básicos:**

**Cuál es la diferencia entre un diseño experimental corriente y RSM?:** un diseño experimental por si solo tiene como objetivo localizar el tratamiento “ganador” de entre todos aquellos que son probados; y RSM pretende localizar las condiciones óptimas de operación del proceso, de tal manera que RSM plantea un reto mucho más fuerte para el investigador y requiere de una estrategia más completa, que incluye la posibilidad de efectuar varios experimentos secuenciales y el uso de técnicas matemáticas más avanzadas.

**Qué es la región de operabilidad del proceso?:** Está delimitada por el conjunto de puntos donde el equipo o proceso puede ser operado, una aproximación a esta región puede venir especificada por el fabricante del equipo (al menos para algunas variables en forma independiente); aunque es poco probable que esta región esté delimitada con 100% de confiabilidad pues muchas variables interactúan y el efecto de esas interacciones puede no ser conocido o no ser medido.



**Qué es la región de experimentación del proceso:** Está delimitado por los rangos de experimentación utilizados en cada factor, ya sea, que hayan sido seleccionados de manera aleatoria (efectos aleatorios) o a criterio (efectos fijos) del investigador.

Es importante tener en cuenta entonces que la región de operabilidad debe contener a la región de experimentación.

**Curvas de nivel (gráficos de contorno):** Permite ubicar sobre una región tridimensional calculada con base en un modelo matemático y casi siempre probabilístico aquellos puntos sobre los cuáles la variable de respuesta toma el mismo valor; cada punto se representa acorde con el modelo de regresión que se obtiene al analizar la información experimental. Las curvas de nivel son también muy utilizadas en mapas para representar sobre ellos puntos con igual altitud sobre el nivel del mar, ó con igual temperatura, humedad, presión atmosférica, etc. En el caso de RSM representan el mismo valor estimado para la variable de respuesta el cuál es generalmente ocasionado por infinitas combinaciones de valores de los factores experimentales. Una ventaja de la superficie de respuesta es que se pueden observar las estimaciones de la respuesta en todos los posibles niveles de los factores estudiados.

En los modelos de primer orden las curvas de nivel tienen una serie de líneas paralelas que representan las coordenadas o combinaciones de los niveles de los factores que producen la misma respuesta media. Mientras que en los modelos de segundo orden existen varios patrones de curvas posibles que describiremos más adelante en el presente documento.

## ***Desarrollo de contenido:***

### **Orígenes de la metodología:**

Los orígenes de la metodología de superficies de respuesta (en inglés, Response Surface Methodology - RSM) se remiten al trabajo de Box y Wilson (1951); pero ha sido durante los últimos 20 años en que dicha metodología ha tenido un desarrollo considerable tanto en aspectos teóricos como en aplicaciones en escenarios reales. Inicialmente debutó con considerable éxito en la industria química y últimamente ha encontrado amplia aplicación en procesos de fabricación de semiconductores, aparatos electrónicos, maquinado, corte de metal y procesos de ensamble. Este desarrollo se refleja en varias publicaciones sobre el tema tales como: Box y Draper (1987), Khuri y Cornell (1987), Cornell (1990) y Montgomery y Myers (1996), entre otras. Como gran facilitador de este desarrollo se ha constituido el alto desarrollo de los sistemas computacionales, el cuál ha permitido el desarrollo de gráficos que facilitan el análisis de los resultados.



## Presentación de la metodología:

Es una estrategia de experimentación secuencial y modelación que permite estimar las condiciones óptimas de operación de un proceso y mejorar significativamente su resultado en cuanto a costos, tiempos, eficiencia, productividad, cumplimiento de especificaciones y en fin, mejorar su calidad. Un proyecto bien planeado y ejecutado adecuadamente debe reflejar sus resultados no sólo en los indicadores de productividad y de gestión del proceso, sino que en el mediano plazo dichos resultados deben reflejarse en los estados financieros de la compañía.

La superficie de respuesta permite que el investigador inspeccione de manera visual, la respuesta promedio para cierta zona de los niveles de los factores de interés y evaluar su sensibilidad a dichos factores.

La estrategia de análisis supone que el promedio (media) de la variable de respuesta está en función de los niveles cuantitativos representados por los factores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Los modelos polinomiales son los utilizados para efectuar una aproximación práctica a la función de respuesta verdadera o real (aquella que “sólo DIOS conoce”). Los desarrollos incorporados hasta ahora en programas computacionales (por ejemplo MINITAB) permiten analizar fácilmente y en forma gráfica modelos polinomiales de primer (efectos lineales y de interacción) y segundo orden (efectos lineales, cuadráticos y de interacción).

Para la implementación exitosa de la metodología de Superficies de Respuesta, se aconseja tener muy en cuenta los siguientes aspectos:

1. La implementación debería estar enmarcada dentro de un proyecto de mejoramiento acorde con los objetivos estratégicos de la compañía, de tal manera que se cuente con el apoyo total en aspectos económicos y administrativos; puesto que el proyecto en sí es una inversión que en su etapa inicial demandará recursos de la compañía.
2. Se deben tener claramente cuantificados en términos de indicadores de gestión y de indicadores financieros, los beneficios que se espera obtener como resultado de la implementación.
3. Su aplicación será más efectiva en procesos con nivel de calidad  $2.8\sigma$  o superior.
4. Su aplicación requiere que tanto la característica de calidad como los factores sean de tipo cuantitativo.
5. Se debe tener un alto grado de confiabilidad en los datos recolectados del proceso, se recomienda verificar previamente el comportamiento de los sistemas (instrumentos) de medición, aplicando en lo posible metodología estadística para evaluar su estabilidad y determinar el grado de incertidumbre.
6. Se debe contar con amplio conocimiento técnico sobre el proceso a optimizar, experiencia sobre sus variables de entrada, variables de salida, causas probables de variación y en general factores que pueden afectar el resultado de las salidas o características de calidad.
7. Se debe contar con conocimientos básicos en inferencia estadística, muestreo, modelos de regresión y planeamiento de experimentos; estos conocimientos previos se pueden adquirir con aproximadamente 100 horas de capacitación.



En términos generales, para aplicar RSM se requiere cumplir con los siguientes pasos:

**Reducción de dimensionalidad:** Algunos autores lo llaman cribar, otros tamizar; pero consiste esencialmente en seleccionar de entre muchos, los factores que más significativamente afectan la característica o características de calidad que se pretenden optimizar. Si bien debe ser claro que el resultado de cada característica de calidad se produce por la interacción de miles y hasta millones de otras variables que la afectan en mayor o menor proporción; será bastante complicado y además costoso manipular muchos factores, por experiencia se conoce que al manejar información con más de cuatro factores los análisis comienzan a ser muy dispendiosos y los efectos tienden a confundirse. Entonces se puede proceder con información histórica reciente recolectada del proceso a estimar la influencia de cada uno de los factores sobre la variable de respuesta (para este procedimiento se recomienda en Análisis de Varianza – ANOVA), existe la alternativa de correr un experimento factorial; pero de ambas formas y con el concurso del conocimiento técnico que sobre el proceso se tenga, el resultado esperado es seleccionar en lo posible de 2 a 4 factores como aquellos que con mayor probabilidad afectan significativamente la característica a optimizar.

**Experimento con modelo de primer orden:** Una vez cumplida la etapa de reducción de dimensionalidad, se efectúa un estudio más completo y controlado de dichos factores. Los tipos de diseño más utilizados en esta etapa son:

- Diseños  $2^k$  : el cuál indica que se estimará el efecto que sobre la característica de calidad presentan k factores, cada uno de estos probado en 2 niveles (nivel alto y nivel bajo); se probarán entonces  $2^k$  tratamientos.
- Diseños fraccionados  $2^{k-p}$  : el cuál indica que se estimará el efecto que sobre la característica de calidad presentan k factores, pero no se probarán todos los  $2^k$  posibles tratamientos, sino que el número de tratamientos se reduce a  $2^{k-p}$ , permitiendo de esta manera estimar más efectos a un menor costo.
- Otros métodos alternativos son los diseños Simples y los diseños de Plackett-Burman.

La ecuación matemática de un modelo de primer orden con factores  $x_1$  y  $x_2$  es:

$$\mu_y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \xi$$

donde:

$\mu_y$  = Valor promedio de la variable de respuesta (Rendimiento).

$\beta_0$  = Valor promedio de la respuesta, en ausencia del efecto de los factores  $x_1$  y  $x_2$

$\beta_1$  = Razón de cambio (efecto lineal) del factor 1 sobre la respuesta promedio.

$\beta_2$  = Razón de cambio (efecto lineal) del factor 2 sobre la respuesta promedio.



$\beta_{12}$  = Razón de cambio del efecto de interacción entre  $x_1$  y  $x_2$  sobre la respuesta promedio.

$\xi$  = Término de error (efectos no explicados por el modelo).

El objetivo principal de esta etapa es confirmar la influencia significativa de los factores sobre la característica de calidad a optimizar, determinar la significancia de las interacciones entre dichos factores, estimar el modelo de regresión que describa el comportamiento del efecto de dichos factores y determinar en que dirección se encuentran las condiciones más probables para optimizar la característica de calidad.

Para efectos de nuestro ejemplo como modelo de primer orden se corrió un diseño  $2^2$  con niveles de Tiempo de 70 y 80 minutos, y niveles de temperatura de 127,5 y 132,5 grados Celsius. Los resultados de la Tabla 1. corresponden al análisis cuantitativo del experimento en los cuáles se comprueba estadísticamente (Nivel de significancia del 5%) que el factor Tiempo resulta ser significativamente influyente sobre el Rendimiento en razón a su p-value = 0,0406 (menor que el 5% de significancia); además el factor Temperatura también resulta ser significativamente influyente sobre el Rendimiento en razón a su p-value = 0,0125; no ocurre de la misma manera con el factor de interacción Tiempo-Temperatura que resulta no ser significativo en razón a su p-value = 0,1488. Además, la interpretación del  $R^2$  ajustado = 87,4431% nos indica que el modelo ajustado explica el 87,4% de la variabilidad del rendimiento, lo que en pocas palabras significa un buen ajuste y que se va por buen camino hacia la optimización. Se recomienda que el  $R^2$  ajustado sea de al menos 75% para considerar la posibilidad de continuar la metodología, de no ser así es muy probable que el procedimiento nos lleve por un camino errado que hará desperdiciar recursos.

En la Figura 1. se observa la superficie de respuesta calculada con base en un modelo de primer orden, para cada combinación de Tiempo y Temperatura se representa gráficamente el valor estimado de la respuesta media para la productividad; nótese que la superficie representada es un plano, y no necesariamente por que de esa forma se comporta el proceso en realidad (eso deberá comprobarse con análisis adicionales) sino porque es la representación que se puede obtener con el diseño-modelo utilizado.

La Figura 2. es el gráfico de contorno o curvas de nivel equivalentes a la misma superficie de respuesta del modelo, pero trasladado a 2 dimensiones para facilitar la interpretación del investigador. Cada franja de color contiene un número infinito de combinaciones Tiempo-Temperatura para los cuáles el rendimiento medio esperado se encuentra en un determinado rango; por ejemplo se puede observar que la franja marcada con el número 3 contiene las combinaciones Tiempo-Temperatura para las cuáles se estima un rendimiento medio entre 62,5% y 65%; no obstante, también se puede estimar la respuesta media para un solo punto en particular, y como ejemplo la figura nos indica que cuando Tiempo= 79,8413 minutos y Temperatura= 132,276 grados Celsius, el rendimiento medio esperado se estima en 67,8466%.



Adicionalmente, para completar la validez estadística tanto de modelos de primer como de segundo orden, se deben efectuar las respectivas pruebas a los residuos del modelo, tales como:

- Prueba de normalidad: aquí se recomienda efectuar prueba de Kolmogorov-Smirnov, o prueba de Shapiro-Wilks, o prueba de Anderson-Darling.
- Prueba de Independencia: aquí se recomienda efectuar prueba de Durbin-Watson.
- Prueba de Homoscedasticidad: Aquí se recomienda formar grupos de 4 o 5 residuos consecutivos, para cada grupo calcular promedio y varianza, y posteriormente validar la relación lineal entre promedios de residuos y varianzas de residuos; si se encuentra una relación lineal significativa habrá indicio de Heteroscedasticidad, es decir, que no se estará cumpliendo el supuesto y habrá que revisar y corregir el modelo.

**Tabla 1.**

ANALISIS DE VARIANZA PARA RENDIMIENTO					
Fuente	Suma de cuadrados	grados de libertad	cuadrados medios	F	P-Value
Modelo	221,78	3	73,93	14,93	0,0262
Residual	14,86	3	4,95		
Total	236,64	6			

Fuente	Suma de cuadrados	grados de libertad	cuadrados medios	F	P-Value
Tiempo	59,29	1	59,29	11,97	0,0406
Temperatura	144,00	1	144,00	29,08	0,1250
Tiempo*Temperatura	18,49	1	18,49	3,73	0,1488
Residual	14,86	3	4,95		
Total	236,64	6			

R-square = 93,7216%

Adj. R-Square = 87,4431%

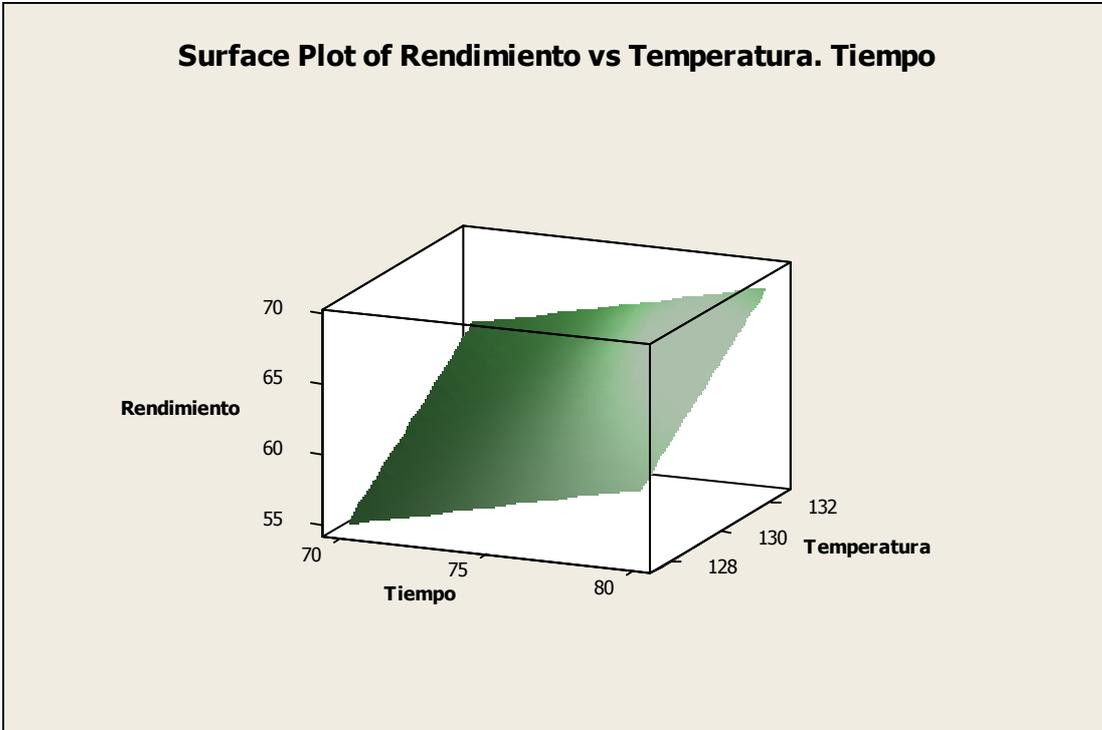


Figura 1. Superficie de respuesta representada por modelo de primer orden ( $2^k$ )

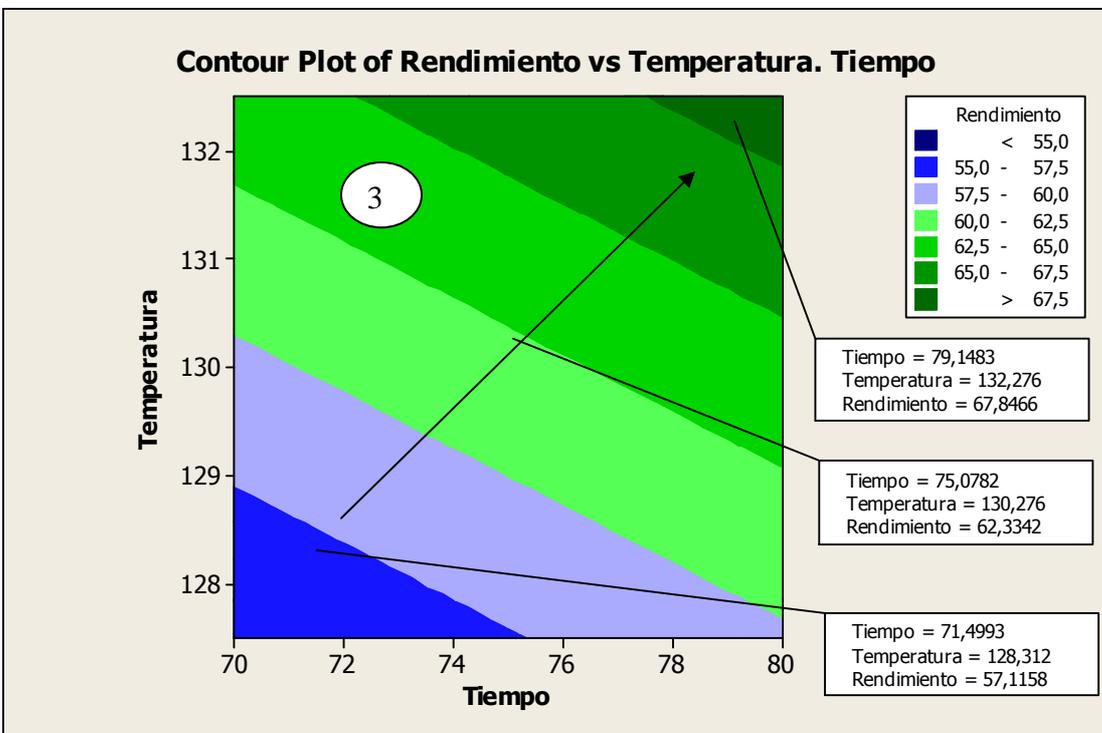


Figura 2. Gráfico de contorno equivalente a la superficie de respuesta de la Figura 1.



La flecha que atraviesa la Figura 2. representa el sentido en el cuál el rendimiento se incrementa, es decir, a medida que el Tiempo y Temperatura aumentan de valor el rendimiento esperado también aumenta. Lo que plantea la hipótesis de que posiblemente por fuera de la región experimental actual (Tiempo $>$ 80 y Temperatura $>$ 132,5) se pueden obtener mejores niveles de rendimiento. Pero antes es estrictamente necesario validar si al interior de la región experimental existe o no efecto de curvatura, lo que significaría que hacia el centro de la región experimental (Tiempo=75 y Temperatura=130) el nivel de rendimiento es significativamente mayor o significativamente menor que el resto de la región experimental; esto se logra anexando al experimento varias réplicas con tratamiento de Tiempo=75 y Temperatura=130 y luego volver a realizar el análisis cuantitativo o análisis de varianza (ANOVA) similar al presentado en la Tabla 1.

**Cómo se debe proceder cuando se detecta curvatura al interior de esta región experimental?:** Para caracterizar y analizar con mayor detalle dicha curvatura, es recomendable inscribir dentro de esta región experimental un modelo de segundo orden; por ejemplo si el modelo es un Diseño Central Compuesto (DCC) sus puntos centrales deben estar en Tiempo=75 minutos y Temperatura=130 grados Celsius, los puntos axiales serán cuatro a saber: Tiempo=75 con Temperatura=127,5, Tiempo=75 con Temperatura=132,5, Tiempo=70 con Temperatura=130, Tiempo=80 con temperatura=130.

**Cómo se debe proceder cuando no se detecta curvatura al interior de esta región experimental?:** Aplicar el método de Escalamiento ascendente ó descendente hasta detectar curvatura y en dicho punto centralizar un modelo de segundo orden. En nuestro ejemplo se debería realizar Escalamiento ascendente en razón a que optimizar nuestra característica de calidad significa maximizarla; en caso en que optimizar nuestra característica de calidad signifique minimizarla (por ejemplo: porcentaje de desperdicio) el método se llamará Escalamiento descendente.

**Método de escalamiento ascendente ó descendente:** es una metodología que permite con base en el modelo estimado por un diseño de primer orden, determinar nuevos puntos o tratamientos, generalmente se calculan 4 o 5 puntos de los cuáles, el primero corresponde al centro del experimento de primer orden y los últimos deben estar por fuera de la región experimental anteriormente señalada, en razón a que es de nuestro interés abandonar esta región experimental en busca del tratamiento que optimice la característica de calidad; en estos puntos se deben correr nuevamente réplicas experimentales para medir la característica de calidad y detectar un punto de inflexión o curvatura. Se recomienda aplicar el método con el modelo de primer orden expresado en unidades codificadas, es decir, las equivalencias entre unidades originales y unidades codificadas para nuestro ejemplo se pueden observar en la Tabla 2.



**Tabla 2.**

Unidades originales		Unidades codificadas	
Tiempo	Temperatura	Tiempo	Temperatura
70	127,5	-1	-1
80	127,5	1	-1
70	132,5	-1	1
80	132,5	1	1
75	130	0	0
72	131	-0,6	0,4
77	128	0,4	-0,8

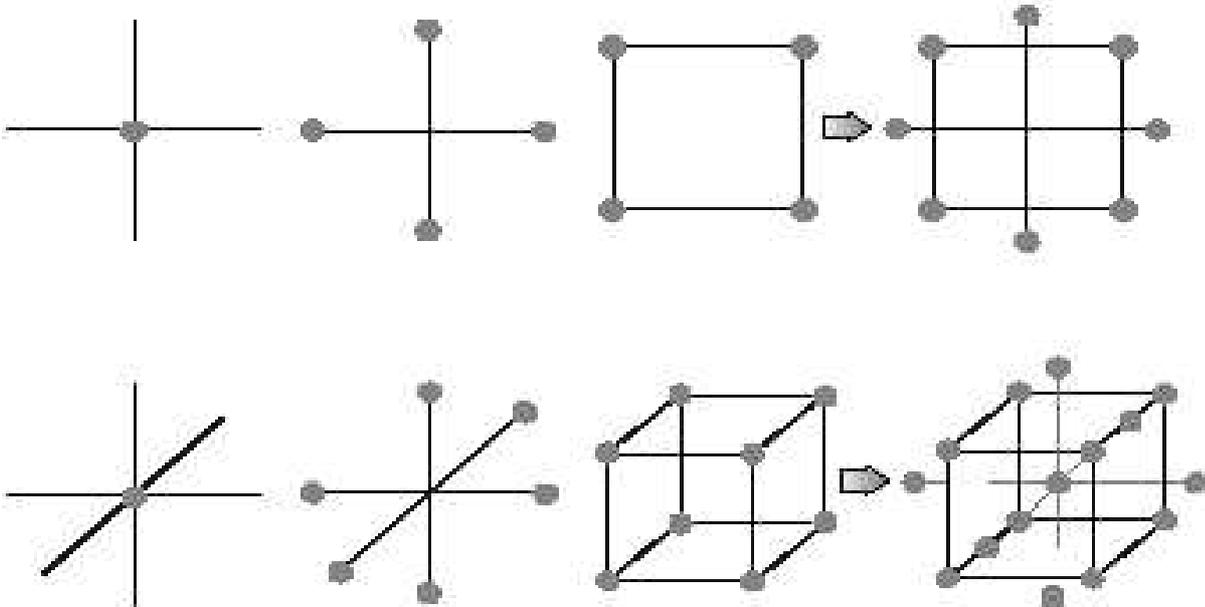
**Experimento con modelo de segundo orden:** El objetivo primordial de esta etapa es modelar el comportamiento del proceso en una región muy precisa y relativamente pequeña, para determinar la combinación de factores que con mayor probabilidad se puede considerar como candidato a óptimo. Es esencial entonces, que los procedimientos anteriores (Diseño de primer orden, Detección de curvatura, Escalamiento Ascendente-Descendente) se hayan cumplido de manera rigurosa.

Los diseños de segundo orden de uso más frecuente son:

- Diseño Central Compuesto (DCC): Es el tipo de diseño más utilizado en esta etapa, debido a su flexibilidad: se puede construir a partir de un diseño factorial  $2^k$  constituyendo la porción factorial del DCC, agregando puntos sobre los ejes en lo que se denominará porción axial y puntos al centro que se denominarán porción central; resulta clave para las propiedades del diseño la distancia entre el centro del diseño y la porción axial; generalmente esta distancia se define como  $\alpha = (F)^{1/4}$ ; donde F corresponde al número de puntos de diseño de la porción factorial. En la Figura 3. se puede observar como la unión de puntos al centro, puntos axiales y porción factorial dan como resultado un DCC; se presente el respectivo ejemplo para 2 y 3 factores.
- Diseño de Box-Behnken: Este diseño se forma al combinar un diseño  $2^k$  con los llamados diseños en bloques incompletos balanceados (DBIB), es importante tener en cuenta que un diseño de bloques es completo si en cada bloque se prueban todos los tratamientos y entonces será incompleto si en cada bloque se prueban sólo algunos tratamientos, y será balanceado si en cada par de tratamientos se efectúa igual número de réplicas. Considere el siguiente ejemplo:

Como DBIB con tres factores ( $x_1, x_2, x_3$ ) y tres bloques ( $B_1, B_2, B_3$ ) donde cada bloque contiene 2 tratamientos en la forma que indica la Tabla 3. Considere además, un diseño  $2^k$  de la forma que se observa en la Tabla 4. La forma de combinar ambos diseños es reemplazar cada par de columnas con asteriscos por los valores de la Tabla 4. y la tercera columna se completa con ceros; además se anexan al final tres filas de ceros significando los puntos centrales del diseño, dando como resultado el diseño de Box-Behnken para tres factores presentado en la Tabla 5.

*puntos al centro + puntos axiales + porción factorial = diseño de composición central*



**Figura 3. DCC para 2 y 3 factores respectivamente.**

**Tabla 3.**

	X1	X2	X3
<b>B1</b>	****	****	
<b>B2</b>	****		****
<b>B3</b>		****	****

**Tabla 4.**

X1	X2
-1	-1
1	-1
-1	1
1	1



**Tabla 5.**

X1	X2	X3
-1	-1	0
1	-1	0
-1	1	0
1	1	0
-1	0	-1
1	0	-1
-1	0	1
1	0	1
0	-1	-1
0	1	-1
0	-1	1
0	1	1
0	0	0
0	0	0
0	0	0

La ecuación matemática de un modelo de segundo orden con factores  $x_1$  y  $x_2$  es:

$$\mu_y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \xi$$

donde:

$\mu_y$  = Valor promedio de la variable de respuesta (Rendimiento).

$\beta_0$  = Valor promedio de la respuesta, en ausencia del efecto de los factores  $x_1$  y  $x_2$

$\beta_1$  = Razón de cambio (efecto lineal) del factor 1 sobre la respuesta promedio.

$\beta_2$  = Razón de cambio (efecto lineal) del factor 2 sobre la respuesta promedio.

$\beta_{11}$  = Razón de cambio (efecto cuadrático) del factor 1 sobre la respuesta promedio.

$\beta_{22}$  = Razón de cambio (efecto cuadrático) del factor 2 sobre la respuesta promedio.

$\beta_{12}$  = Razón de cambio del efecto de interacción entre  $x_1$  y  $x_2$  sobre la respuesta promedio.

$\xi$  = Término de error (efectos no explicados por el modelo).



Para efectos de nuestro ejemplo como modelo de segundo orden se corrió un Diseño Central Compuesto, el cuál se presenta en la Tabla 6. Es importante anotar que dicho experimento de segundo orden requirió solamente doce unidades experimentales (réplicas); lo cual constituye una ventaja importante a la hora de costear el experimento. Los resultados de la Tabla 7. corresponden al análisis cuantitativo del experimento en los cuáles se comprueba estadísticamente (Nivel de significancia del 5%) que el efecto lineal del factor Tiempo resulta ser significativamente influyente sobre el Rendimiento en razón a su p-value = 0,0299 (menor que el 5% de significancia), también resulta ser significativo el efecto cuadrático del factor Tiempo con p-value = 0,0015; además el efecto lineal del factor factor Temperatura también resulta ser significativamente influyente sobre el Rendimiento en razón a su p-value = 0,0014, también resulta ser significativo el efecto cuadrático del factor Temperatura con p-value = 0,0014; no ocurre de la misma manera con el factor de interacción Tiempo-Temperatura que resulta no ser significativo en razón a su p-value = 0,6955. Además, la interpretación del  $R^2$  ajustado = 81,1294% nos indica que el modelo ajustado explica el 81,12% de la variabilidad del rendimiento, lo que en pocas palabras significa un buen ajuste, no obstante el valor de este  $R^2$  ajustado aumentará (muy probablemente) si se vuelve a correr el experimento sin tener en cuenta el efecto de interacción Tiempo-Temperatura. Posterior a probar la significancia de los efectos del modelo, podemos analizar los resultados con ayuda de la Superficie de respuesta (Figura 4.) y el respectivo gráfico de contorno (Figura 5.). Observando la Figura 4. podemos observar que el fenómeno estudiando se representa aproximadamente por un paraboloides con un punto máximo (candidato a punto óptimo), es posible demostrar matemáticamente que la superficie representa un máximo mediante la formulación del modelo de segundo orden en forma matricial:

$$\hat{\mu}_y = \hat{\beta}_0 + X'b + X'BX;$$

Entonces al obtener los valores propios de la matriz B, se espera (para nuestro ejemplo) que todos sean negativos, esto demostrará matemáticamente que nuestra superficie efectivamente representa un máximo. Dicho punto máximo se denomina punto estacionario ( $X_0$ ) el cual se obtiene mediante la siguiente multiplicación matricial:

$$X_0 = -0,5 * B^{-1} * b ;$$

Con ayuda del gráfico de contorno se puede observar que el Rendimiento tiende a ser más alto cuando Tiempo es aproximadamente igual a 89,7 minutos y la Temperatura es aproximadamente igual a 145 grados Celsius; obteniéndose un rendimiento promedio esperado de 95,%. La continuación es probar ese posible óptimo en el escenario real para comprobar que efectivamente se ha mejorado.



**Tabla 6.**

<b>Tipo_punto</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Temperatura</b>	<b>Rendimiento</b>
Factorial	80	140	75
Factorial	80	150	76
Factorial	100	140	77
Factorial	100	150	75
Axial	76	145	83,3
Axial	104	145	81,2
Axial	90	138	81,2
Axial	90	152	83
Central	90	145	95
Central	90	145	96
Central	90	145	94
Central	90	145	95

**Tabla 7.**

ANALISIS DE VARIANZA PARA RENDIMIENTO					
Fuente	Suma de cuadrados	grados de libertad	cuadrados medios	F	P-Value
Modelo	697,05	5	139,41	10,46	0,0063
Residual	79,98	6	13,33		
Total	777,03	11			

Fuente	Suma de cuadrados	grados de libertad	cuadrados medios	F	P-Value
Tiempo	106,84	1	106,84	8,02	0,0299
Temperatura	413,55	1	413,55	31,02	0,0014
Tiempo*Temperatura	2,25	1	2,25	0,17	0,6955
Tiempo*Tiempo	409,10	1	409,10	30,69	0,0015
Temperatura*Temperatura	416,86	1	416,86	31,27	0,0014
Residual	79,98	6	13,33		
Total	777,03	11			

R-square = 89,71%  
Adj. R-Square = 81,13%

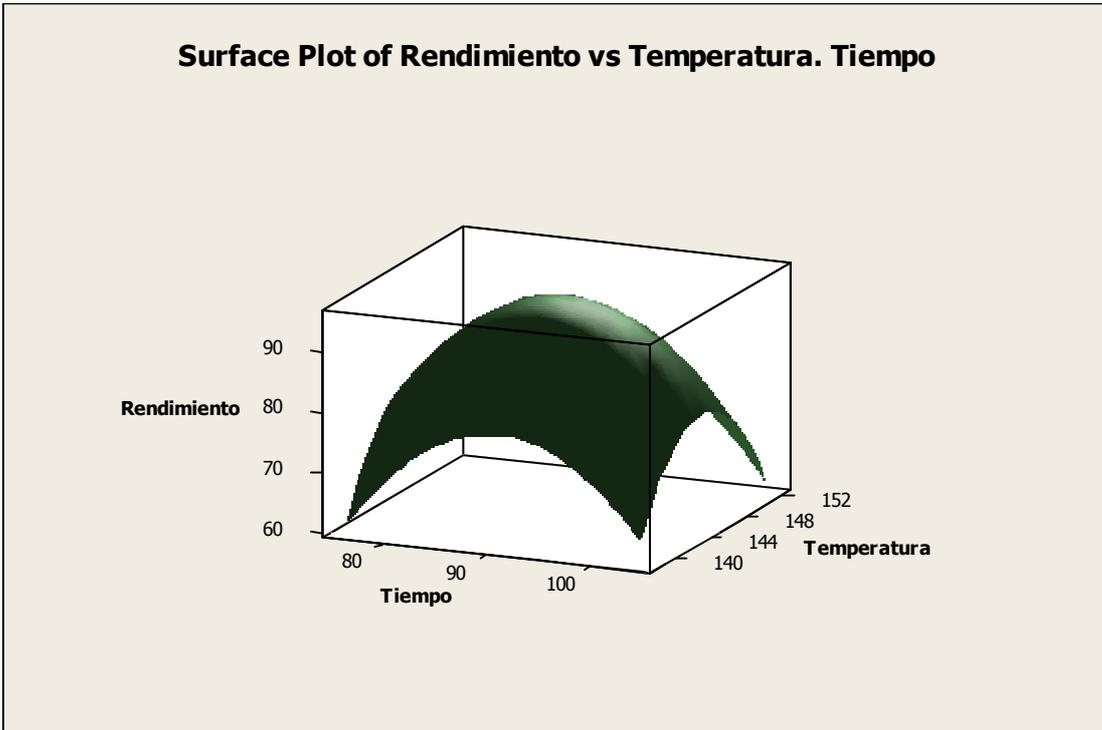


Figura 4. Superficie de respuesta correspondiente al modelo de segundo orden de Tabla 6.

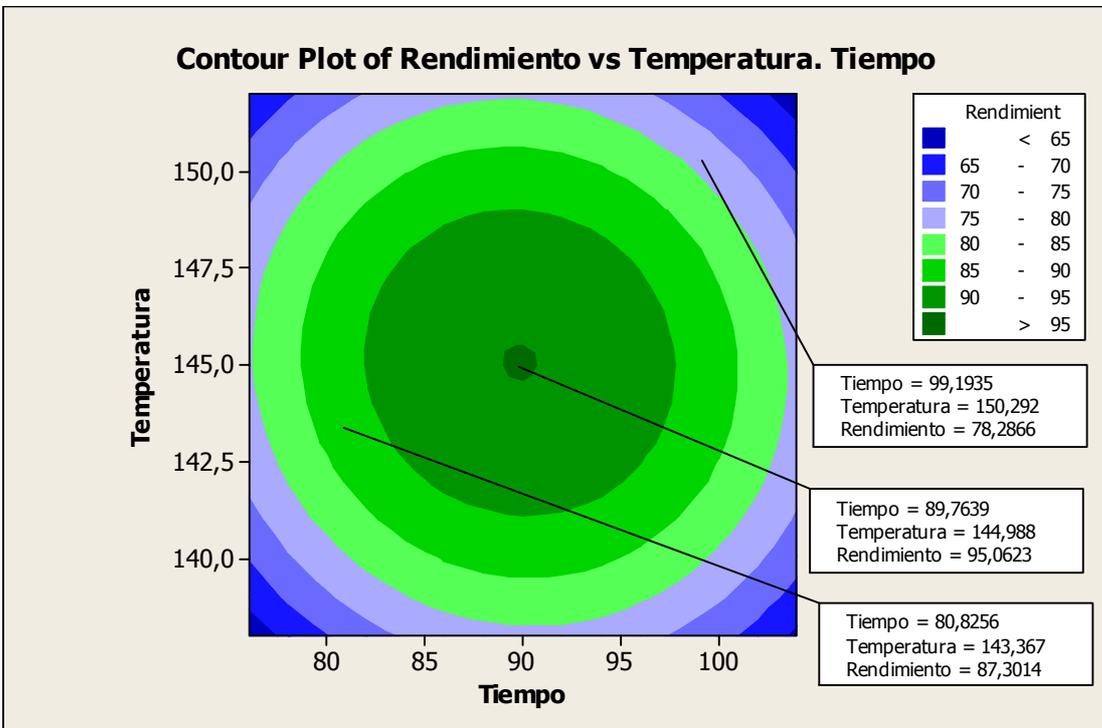
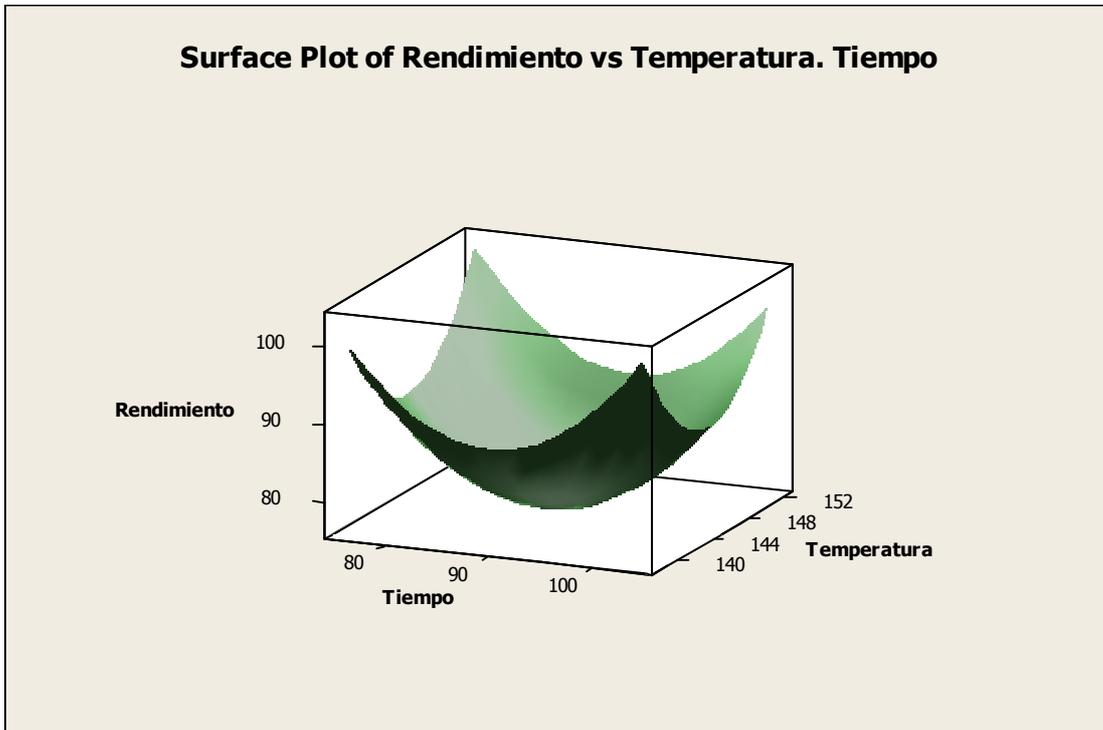


Figura 5. Gráfico de contorno correspondiente a la RSM de la Figura 4.

Con el objetivo de representar algunas de las diferentes formas de superficies de respuesta y gráficos de contorno de segundo orden, se modificaron los datos del ejemplo tratado en el presente documento. Las diferentes formas son:

- Montaña: la respuesta presenta un máximo. (Figura 4. y Figura 5.)
- Valle: la respuesta presenta un mínimo. (Figura 6. y Figura 7.)
- Silla de montar o mínimax: la respuesta aumenta o disminuye a partir del centro de la superficie, según la dirección tomada.
- Cresta ascendente: la respuesta presenta un máximo pero este se encuentra fuera de la actual región experimental; es decir, se puede inferir que la verdadera superficie es una montaña pero no observamos su pico sino un costado.
- Cresta descendente: la respuesta presenta un mínimo pero este se encuentra fuera de la actual región experimental, es decir, se puede inferir que la verdadera superficie es un valle pero no observamos su máxima depresión sino un costado.



**Figura 6. Superficie de respuesta correspondiente al modelo de segundo orden – Tipo Valle.**

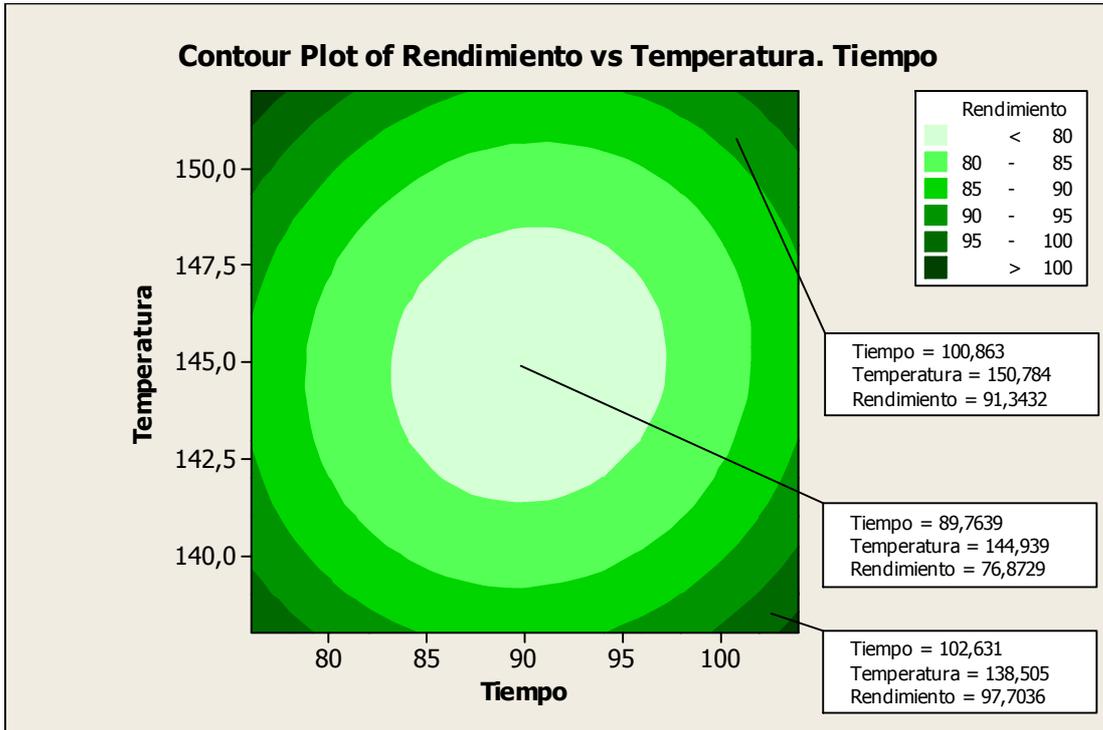


Figura 7. Superficie de respuesta correspondiente al modelo de segundo orden de Figura 6.

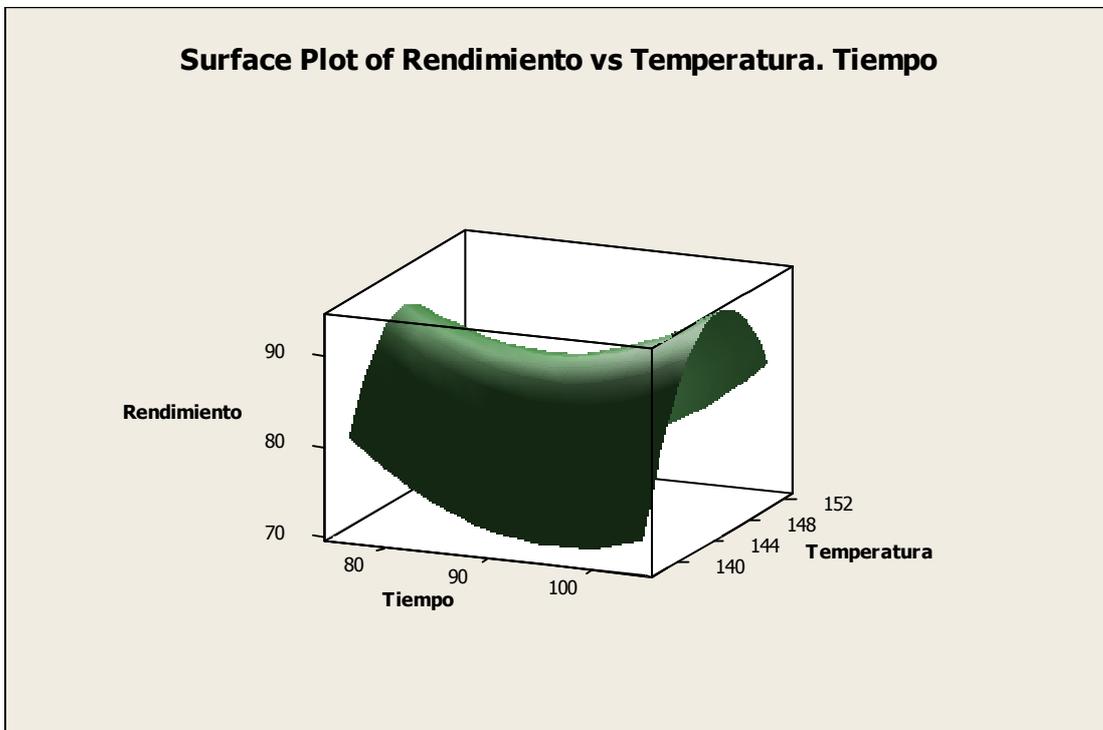


Figura 8. Superficie de respuesta correspondiente al modelo de segundo orden – Tipo Silla.

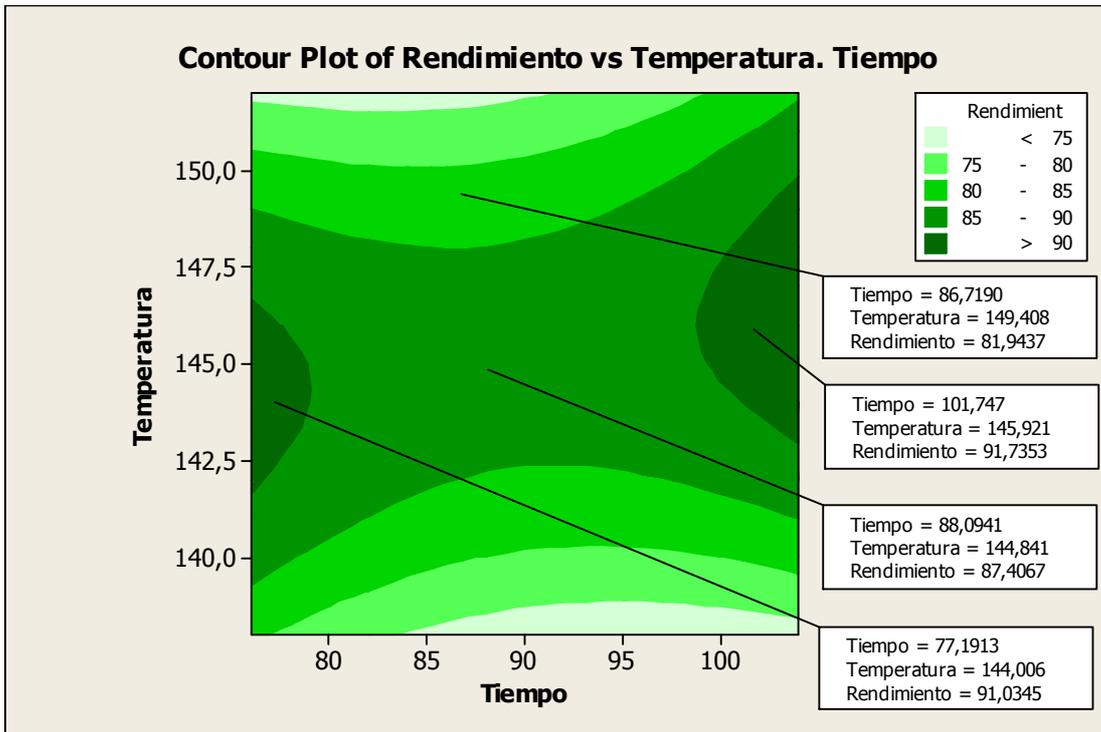


Figura 9. Superficie de respuesta correspondiente al modelo de segundo orden de Figura 8.

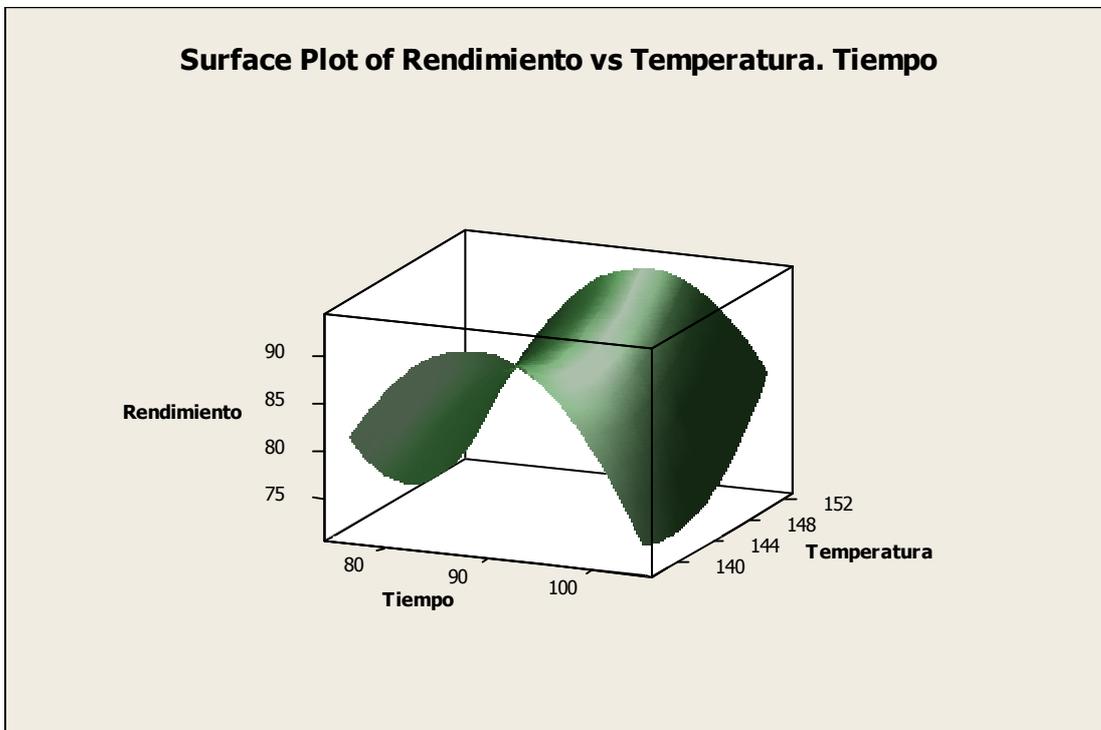
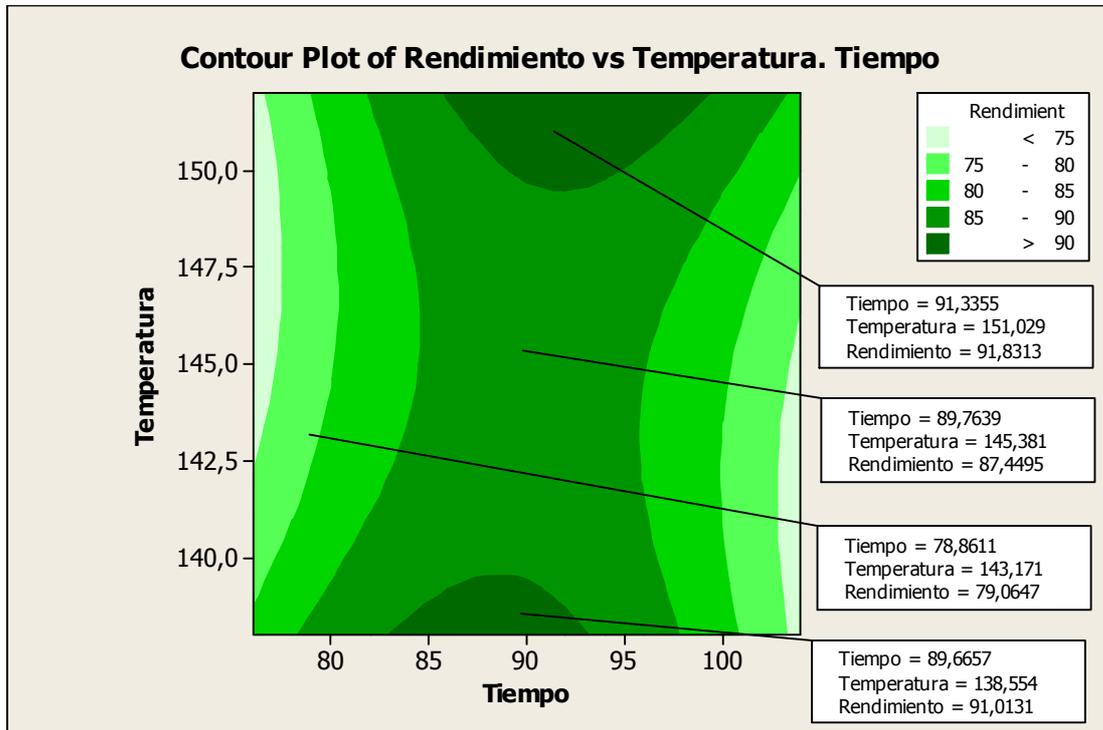


Figura 10. Superficie de respuesta correspondiente al modelo de segundo orden – Tipo Silla.



**Figura 11. Superficie de respuesta correspondiente al modelo de segundo orden de Figura 10.**

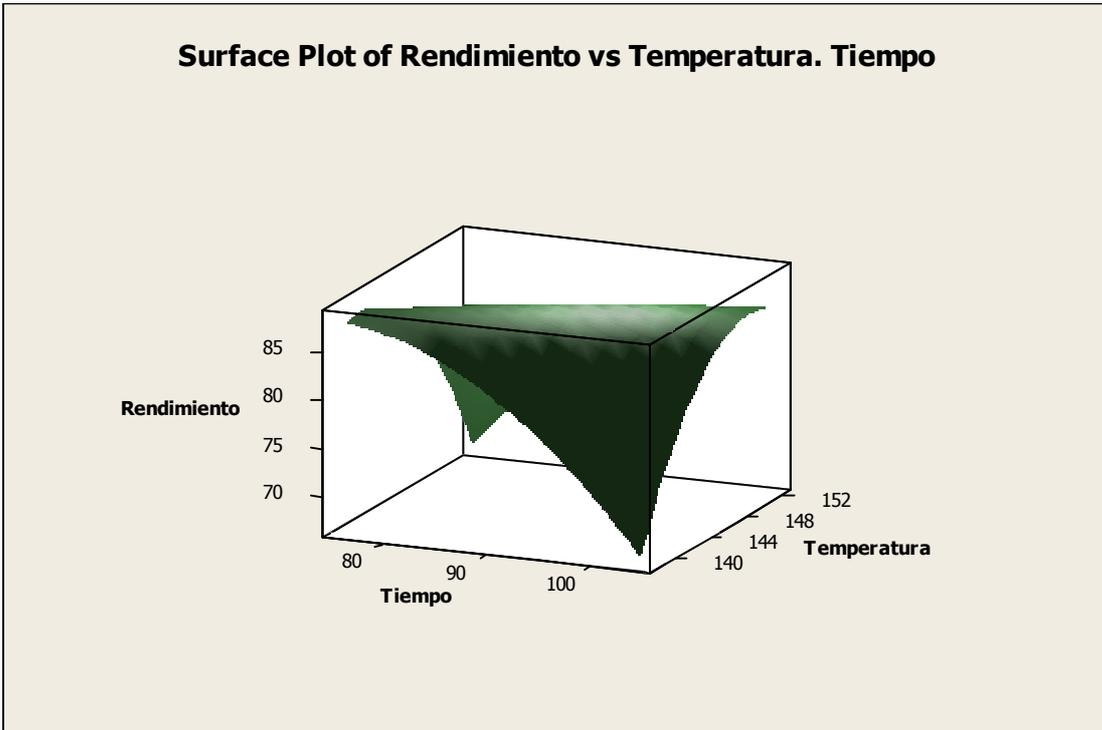


Figura 12. Superficie de respuesta correspondiente al modelo de segundo orden – Tipo Cresta.

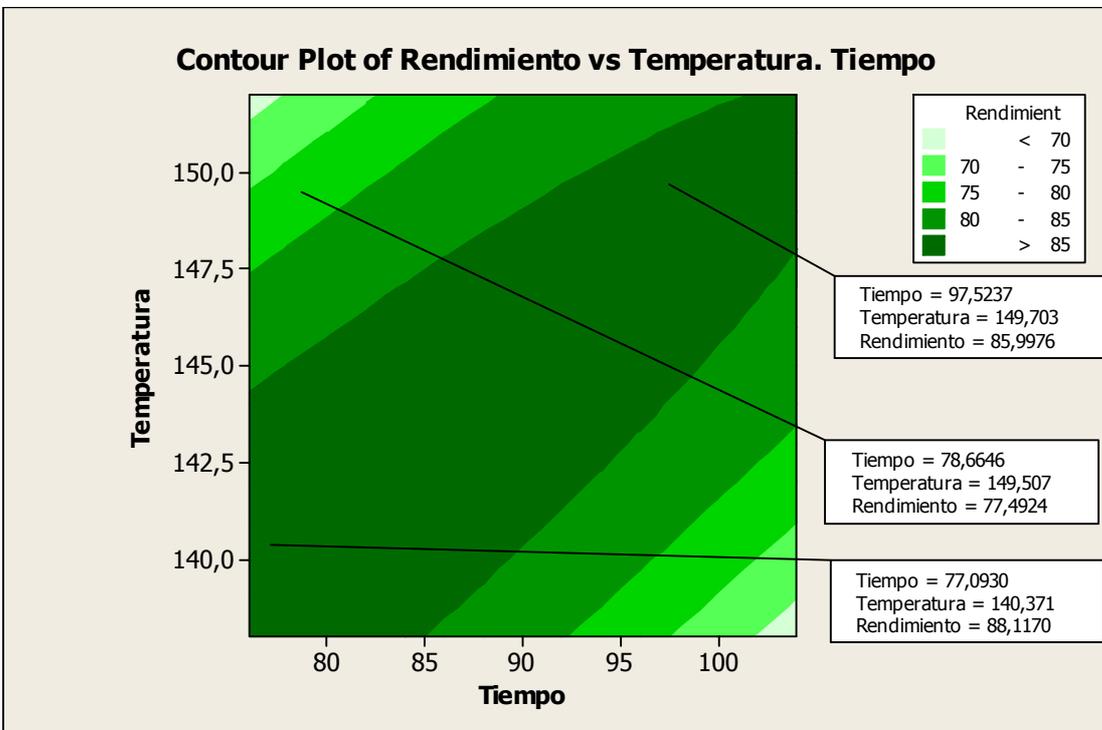


Figura 13. Superficie de respuesta correspondiente al modelo de segundo orden de Figura 12.



**Metodología de Superficies con respuestas múltiples (múltiples características de calidad a optimizar):** Se requiere primero construir un modelo de superficie de respuesta apropiado para cada respuesta y después intentar encontrar un conjunto de condiciones de operación que optimice ó brinde la mejor respuesta posible del conjunto de variables o características de calidad.

Un enfoque relativamente directo para optimizar varias respuestas, que es utilizado y funciona bien en escenarios reales cuando se tienen pocas (hasta 3) variables de respuesta y pocos factores (hasta 2) es la superposición de las gráficas de contorno independientes de cada respuesta; mediante este método el investigador efectúa una inspección visual para determinar alguna zona de intersección que brinde el mejor valor posible para las múltiples respuestas; ó al menos optimizar aquella variable que el investigador considera más importante y manteniendo las otras respuestas dentro de un rango de tolerancia.

Otro enfoque útil para la optimización de múltiples respuestas es usar la técnica de optimización simultánea propuesta por Derringer y Suich (1).

### **Conclusiones:**

1. Respecto al ejemplo, la metodología RSM permitió establecer que para el proceso estudiado se pueden lograr rendimientos altos (hasta 95%) en la zona cercana a Tiempo = 90 minutos y Temperatura = 145 grados Celsius. Es importante anotar que la región experimental con la cuál partió el estudio (ver modelo de primer orden) no contenía este punto; de tal manera que se nota el gran aporte de RSM.
2. Las ayudas computacionales de paquetes estadísticos como por ejemplo Minitab, permiten desarrollar analizar de forma agradable toda la información generada durante el proceso RSM. Ocasionando que se concentre la atención y esfuerzos analíticos en el proceso estudiado y no en la formulación matemática subyacente.
3. Los proyectos con aplicación de RSM, son de alto impacto para el sistema de gestión de calidad de la empresa y se reflejan también (en mediano plazo) en mejoramiento de los estados financieros.
4. Se recomienda el uso de la metodología RSM en proyectos de mejoramiento y/o optimización de procesos, con objetivos enmarcados dentro de los objetivos estratégicos de la empresa.



### **Bibliografía:**

Derringer, G. y R. Suich. (3) “Simultaneous Optimization of Several Response Variables”, Journal of Quality Technology, vol. 12, pp. 214-219

Box, G.E.P. y N.R. Draper. (2) Evolutionary Operation. Wiley, Nueva York.

Box, G.E.P. y N.R. Draper. (3) Empirical Model Building and Response Surfaces. Wiley, Nueva York.

Myers, R. H. y D. C. Montgomery. (4) Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments. Wiley, Nueva York.

Khuri, A. I. y J. A. Cornell. Response Surfaces: Designed and Analyses. 2<sup>a</sup>. Edición, Dekker, Nueva York.

Gutierrez, Humberto. Y De La Vara Salzar, Román. “Análisis y Diseño de Experimentos” Segunda Edición.



## Sobre el autor:



### **Carlos Alberto Cuesta Muñoz**

Certified Quality Engineer – ASQ – American Society for Quality

Certified Six Sigma Black Belt – ASQ – American Society for Quality

Certified Six Sigma Green Belt – ASQ – American Society for Quality

Accredited Training Associate – IASSC – International Association for Six Sigma Certification

Cargo: Gerente Centro de Ingeniería de la Calidad

e-mail: [ccuesta@cicalidad.com](mailto:ccuesta@cicalidad.com)



## Títulos Académicos:

Estadístico - Universidad del Valle (1991)

Magíster en Administración - Universidad del Valle (2004)

## Distinciones Académicas:

Estudiante distinguido – Universidad del Valle – 1991

Para más información: [www.cicalidad.com](http://www.cicalidad.com)

Centro de Ingeniería de la Calidad - [www.cicalidad.com](http://www.cicalidad.com)

**Calle 26 Norte #5AN-54 Cali – Colombia. Teléfono: (572) 6515188**